

مثال:

ادرس قابلية المفاضلة للدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

وذلك في النقطة $(0, 0)$

الحل: أن $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+k^2)}{k^2} - 0}{k} = 0$$

بالقرب من $(0, 0)$

$$f(h, k) - f(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)k + \eta(h, k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\frac{\ln(1+h^2+k^2)}{h^2+k^2} - 0 = 0 + 0 + \eta(h, k)\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \eta(h, k) = \frac{\ln(1+h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

لنرى أن $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \eta(h, k) = 0$

مرفوعة القيم الوسطى

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2 \Rightarrow$$

$$M_1(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M_2(b-a)$$

بمرفوعة القيم الوسطى

$$0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$0(t-0) \leq \int_0^t \frac{dt}{1+t} \leq 1(t-0) \Rightarrow 0 \leq \ln(1+t) \leq t$$

$$\eta(h, k) = \frac{\ln(1+h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \leq \frac{h^2+k^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \eta(h,k) = 0$$

وسأثبت

وبالتالي فإن الدالة $f(x,y)$ قابلة للتفاضل عند النقطة $(0,0)$.

مثال: اثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ للعرض بالشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

يجزئ قابلية التفاضل عند النقطة $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \frac{h^2-0}{h^2+0} - 0}{h} \quad \text{أن: الحل:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \frac{0-k^2}{0+k^2} - 0}{k} = 0$$

بالتعويض في الدالة f بالشكل (2) قابلة للتفاضل

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k + \eta(h,k) \cdot \sqrt{h^2+k^2}$$

$$h \cdot \frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 = h \neq 0 + \eta(h,k) \cdot \sqrt{h^2+k^2}$$

$$\frac{h[(h^2-k^2) - (h^2+k^2)]}{h^2+k^2} = \eta(h,k) \cdot \sqrt{h^2+k^2}$$

$$\eta(h,k) = \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \eta(h,k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2} \cdot h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

فإنه يمكن للدالة η أن تتقارب من العفر عندنا $(0,0) \rightarrow (h,k)$ بالتالي
فإن η غير قابلة للمفاضلة عند النقطة $(0,0)$.

~~النتيجة~~